

# Eine Näherung der Kapazitätsdimension des Rössler Attraktors mittels Box-Counting

**Philip Rauch (Carl-von-Ossietzky Universität Oldenburg)**

Fachrichtung: Physik, Studienphase: Bachelor, Kontakt: philip.rauch@uo1.de; Projektbericht aus dem Seminar „Selbstständiges Erforschen physikalischer Systeme mit numerischen Methoden“ (WS 2017/18), Dozent: Christoph Norrenbrock

*In dieser Arbeit wird eine Näherung der Kapazitätsdimension des Rössler Attraktors mittels Takens box-counting Algorithmus errechnet. Dabei wird einem auftretenden Konvergenzproblem des Algorithmus durch Extrapolation begegnet.*

## 1 Einleitung

Eine Grundeigenschaft von Attraktoren ist ihre Kapazitätsdimension. Attraktoren, welche eine fraktale Struktur aufweisen, wie es bei dem Rössler Attraktor der Fall ist, bilden die seltsamen Attraktoren [Boeing 2016, Rössler 1976] und können typischerweise durch ihre nicht ganzzahlige Kapazitätsdimension charakterisiert werden [Mandelbrot 1977]. Im Weiteren erlaubt die Kapazitätsdimension Aussagen über die Menge an Information, welche nötig ist, um den Attraktor zu spezifizieren [Russell 1980]. Takens hat nun einen box-counting Algorithmus vorgeschlagen, um die Kapazitätsdimension eines Attraktors zu errechnen [Takens 2006]. Der Algorithmus hat gute Ergebnisse für Mengen im zweidimensionalen Raum erzielt. Für höherdimensionale Mengen und insbesondere fraktale höherdimensionale Mengen wie dem Lorenz Attraktor [Lorenz 1963], stößt der Algorithmus jedoch an seine Grenzen [Greenside 1982, McGuinness 1983]. Im Rahmen dieser Arbeit wird Takens box-counting Algorithmus auf dem Rössler Attraktor, welcher als Vereinfachung des Lorenz Attraktors [Rössler 1976] gesehen werden kann, angewandt, um schließlich eine Näherung der Kapazitätsdimension des Attraktors zu errechnen. Es wird sich zeigen, dass auch hier Takens box-counting Algorithmus an seine Grenzen stößt.

## 2 Der Rössler Attraktor

Der Rössler Attraktor bildet den Attraktor zu dem Rössler System. Das Rössler System setzt sich aus den folgenden drei gekoppelten, nichtlinearen, gewöhnlichen Differentialgleichungen (1) zusammen, welche ein zeitkontinuierliches dynamisches System definieren [Rössler 1976].

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -(y + z) \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + (x - c)z\end{aligned}\tag{1}$$

$a$ ,  $b$  und  $c$  sind dabei regulierbare Parameter, welche für diese Arbeit mit  $a = 0.15$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 10$  festgelegt seien. Das Rössler System (1) liefert nun zu gegebenen Anfangsbedingungen  $(x_0, y_0, z_0)$  eine Trajektorie im Phasenraum. Erreicht die Trajektorie den Rössler Attraktor, welcher eine Teilmenge des Phasenraums darstellt, so verbleibt sie hier mit fortschreitender Zeit  $t$ . Der Fluss von einer Menge solcher Trajektorien verschafft uns nun ein



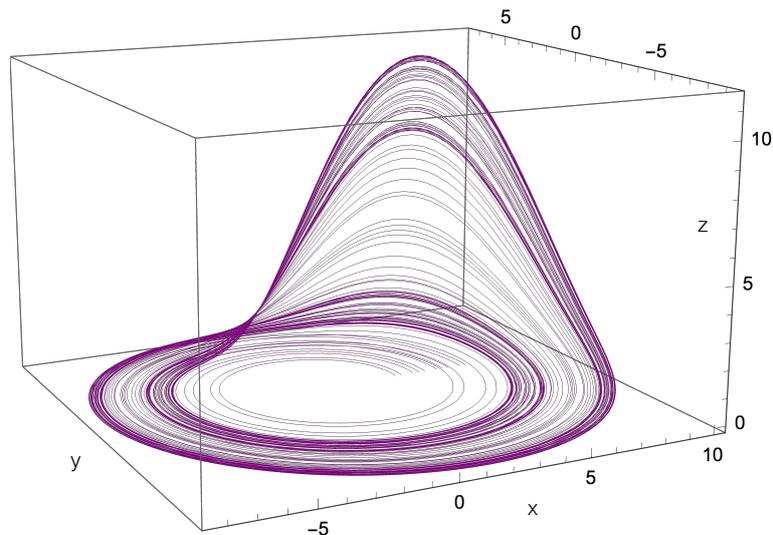


Abbildung 1: Darstellung einer Menge von Trajektorien des Rössler Systems (1) im Phasenraum.

in Abb. 1 dargestelltes Bild des Rössler Attraktors. Um nun die Dynamik auf dem Attraktor, sowie dessen Struktur besser zu verstehen, erstellen wir eine Poincaré-Abbildung. Hierzu betrachten wir die Schnittpunkte einer Menge von Trajektorien auf dem Attraktor mit einer zweidimensionalen, transversalen Fläche (Poincaré-Schnitt). Der Poincaré-Schnitt liege dabei anfangs in der  $zx$ -Ebene und umfasse lediglich den positiven Bereich der  $x$ -Achse. Wir lassen den Poincaré-Schnitt nun um die  $z$ -Achse rotieren und beobachten die Entwicklung der Poincaré-Abbildung (Abb. 2). Die Poincaré-Abbildung wird zunächst gestreckt (Abb. 2b-2c) und schließlich auf sich selbst gefaltet (Abb. 2c-2d). Die Trajektorien kommen sich dabei beliebig nahe, kreuzen sich aber nicht. Diese Streck- und Faltoption wiederholt sich nun fortlaufend, was in dem Aufbau einer unendlich geschichteten Struktur des Attraktors resultiert [Peitgen 2004]. Ein Querschnitt durch den Attraktor bildet die Struktur einer Cantor-Menge. Dies führt uns auf einen fraktalen Attraktor im Phasenraum, welcher zu den seltsamen Attraktoren zählt [Rössler 1976].

### 3 Die Kapazitätsdimension

Im Folgenden wird die Kapazitätsdimension des Rössler Attraktors mittels Takens box-counting Algorithmus genähert. Die Definition der Kapazitätsdimension  $D$  eines Attraktors als Teilmenge des Phasenraums sei nun wie folgt gegeben [Farmer 1983, Mandelbrot 1977].

$$D = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon} \quad (2)$$

$N(\epsilon)$  sei dabei die minimale Anzahl von Würfeln mit der Seitenlänge  $\epsilon$ , welche zur Überdeckung des Attraktors nötig sind. Die Kapazitätsdimension gibt somit an, wie sich die Anzahl der zur Überdeckung des Attraktors nötigen Würfel  $N(\epsilon)$  mit Verkleinerung der Seitenlänge  $\epsilon$  der Würfel ändert [Leven 1989]:

$$N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D}. \quad (3)$$



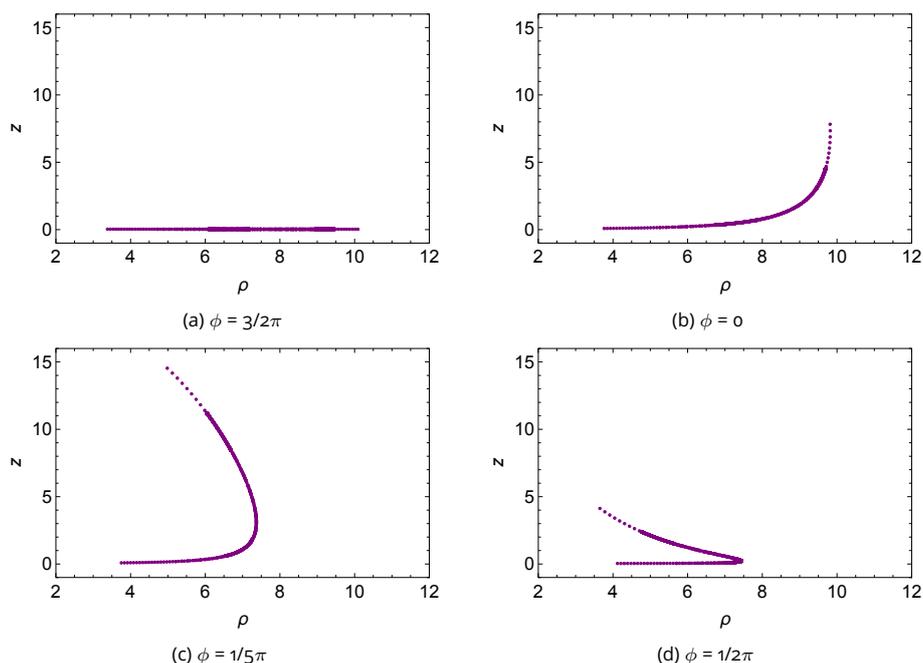


Abbildung 2: Poincaré-Abbildung zu einem um die z-Achse rotierenden Poincaré-Schnitt. Der Poincaré-Schnitt liege dabei zunächst in der xz-Ebene und umfasse lediglich den positiven Bereich der x-Achse. Der Poincaré-Schnitt wird dann mit dem Winkel  $\phi$  um die z-Achse rotiert.

Mit dem Proportionalitätsfaktor  $K$  können wir

$$N(\epsilon) \approx K \epsilon^{-D} \quad (4)$$

für ein genügend kleines  $\epsilon$  schreiben. Dies lässt sich weiter umschreiben zu

$$\ln N(\epsilon) = -D \ln \epsilon + \ln K, \quad (5)$$

was eine praktikablere Form darstellt als Gleichung (2), da hier der Fehlerterm  $\ln K / \ln \epsilon$  nur langsam verschwindet für  $\epsilon \rightarrow 0$  [Russell 1980]. Gehen wir also von Gleichung (5) aus, so müssen wir nun auf numerischem Wege hinreichend viele Werte  $N(\epsilon)$  für genügend kleine  $\epsilon$  errechnen. Schließlich plotten wir  $\ln N(\epsilon)$  gegen  $-\ln \epsilon$  und erhalten die Kapazitätsdimension  $D$  des Attraktors als asymptotische Steigung. Um  $N(\epsilon)$  zu nähern, verfolgen wir eine Trajektorie auf dem Attraktor mit fortlaufender Zeit  $T$ . Hierzu wurden die Gleichungen (1) mit einem 4-Schritt Runge-Kutta-Verfahren bei einer konstanten Schrittweite von  $h = 10^{-3}$  gelöst. Rastern wir den Phasenraum mit einem Boxengitter der Boxengröße  $\epsilon$ , so können wir nun die von der Trajektorie zum Zeitpunkt  $T$  getroffenen Boxen auszählen. Wir können dann die Summe  $N$  der getroffenen Boxen gegen die Zeit  $T$  plotten, in der Erwartung, dass sich eine Konvergenz gegen  $N(\epsilon)$  einstellt.

In der Umsetzung stellte sich jedoch heraus, dass sich auch nach großen Iterationsweiten für Boxengrößen im Bereich von  $5 \cdot 10^{-4}$  bis  $30 \cdot 10^{-4}$  keine Konvergenz gegen  $N(\epsilon)$  einstellt. Der typische Verlauf der getroffenen Boxen  $N$  gegen die Zeit  $T$  ist in Abb. 3 exemplarisch für die Boxengröße  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$  dargestellt.

Es ist gut zu erkennen, dass auch nach sehr großer Iterationsweite keine Konvergenz abzuse-



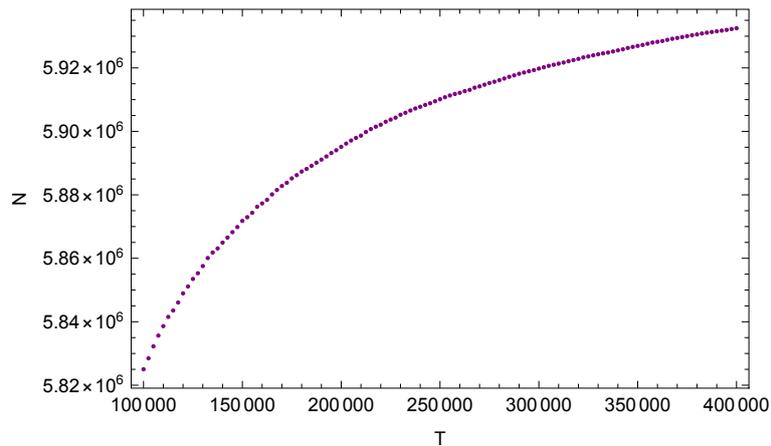


Abbildung 3: Getroffene Boxen  $N$  gegen die Zeit  $T$  für die Boxengröße  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ . Auch nach äquivalenten  $8 \cdot 10^9$  Iterationen ist keine Konvergenz gegen  $N(\epsilon)$  abzusehen.

hen ist. Ursache hierfür ist zum Einen die exponentielle Abhängigkeit der zum Überdecken des Attraktors nötigen Boxen  $N(\epsilon)$  (Gl. 3) von der Kapazitätsdimension  $D$  des Attraktors [Russell 1980]. Für höherdimensionale Mengen wie dem Rössler Attraktor sind folglich für kleine  $\epsilon$  enorme Iterationsweiten erforderlich, um sich  $N(\epsilon)$  zu nähern. Im Weiteren legt die langsame Konvergenz nahe, dass es Bereiche auf dem Attraktor gibt, welche nur selten von der Trajektorie besucht werden [Greenside 1982]. Ebendiese Bereiche fordern hohe Iterationsweiten, um sie zu erreichen und somit abzudecken, was eine langsame Konvergenz als Folge hat. Um dies zu veranschaulichen, verfolgen wir eine Trajektorie auf dem Attraktor für eine ausreichend lange Zeit und projizieren diese in die  $xy$ -Ebene. Wir können nun die Dichteverteilung der projizierten Iterationspunkte in einem Konturplot nähern (Abb. 4). Die Ungleichverteilung

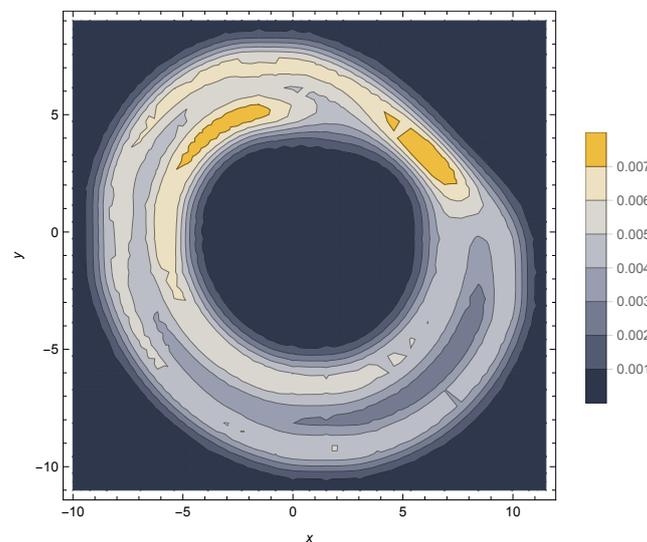


Abbildung 4: Dichteverteilung der in die  $xy$ -Ebene projizierten Iterationspunkte einer Trajektorie auf dem Attraktor.

lung der Iterationspunkte auf dem Attraktor ist nun gut zu erkennen. Die Verteilung weist auf



die Bereiche auf dem Attraktor hin, welche nur selten von der Trajektorie besucht werden.

Da der Rössler Attraktor einen ähnlichen Fluss wie der Lorentz Attraktor aufweist und ein Modell des Lorentz Attraktors darstellt [Rössler 1976], wollen wir uns nun in Hinsicht auf das Konvergenzproblem an der Arbeit von McGuinness zur Kapazitätsdimension des Lorentz Attraktors [McGuinness 1983] orientieren. Der Autor stößt ebenfalls auf das Konvergenzproblem für den Lorentz Attraktor und kommt zum Schluss, dass die Konvergenz algebraischer Natur ist. Folglich extrapoliert McGuinness  $N$  in der Zeit  $T$  auf Basis der folgenden algebraischen Modellfunktion

$$N = N(\epsilon) - \lambda T^{-1/\mu}. \quad (6)$$

Nehmen wir nun an, dass  $N$  für den Rössler Attraktor ebenfalls algebraisch gegen  $N(\epsilon)$  konvergiert, so können wir  $N$  mittels einer Anpassung der Modellfunktion (6) an die errechneten Daten  $N$  in Abhängigkeit von  $T$  in der Zeit extrapolieren, um so  $N(\epsilon)$  zu erlangen.

Die Anpassung der Modellfunktion (6) an die errechneten Daten  $N, T$  lieferte für sämtliche Boxengrößen im Hinblick auf die Anpassungsgüte ein sehr gutes Ergebnis, was für die Richtigkeit der Annahme der algebraischen Konvergenz von  $N$  gegen  $N(\epsilon)$  spricht. Abb. 5 zeigt einen Plot der Residuen von der Anpassung für die Boxengröße  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ .

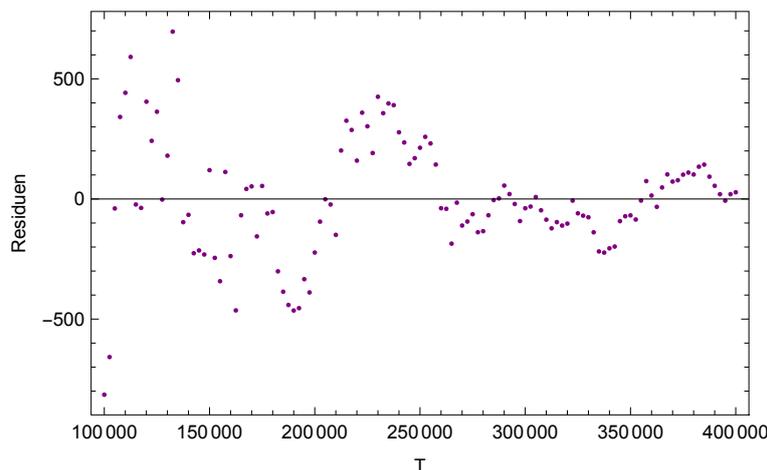


Abbildung 5: Residuen zur Anpassung der Modellfunktion (6) an die errechneten Daten  $N$  in Abhängigkeit von  $T$  (Abb. 3) für die Boxengröße  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$

Dieser Residuenverlauf ist typisch und fand sich bei sämtlichen Boxengrößen. Im Weiteren wurde eine logarithmische Modellfunktion zur Anpassung an die errechneten Daten  $N, T$  in Betracht gezogen. Die Anpassung führte jedoch zu systematischen Abweichungen zwischen dem angepassten logarithmischen Modell und den errechneten Daten, weshalb die logarithmische Modellfunktion ausgeschlossen wurde.

Mittels der durch Extrapolation erlangten Werte  $N(\epsilon)$  können wir schließlich  $\ln N(\epsilon)$  gegen  $-\ln \epsilon$  plotten und erhalten die genäherte Kapazitätsdimension  $D$  des Attraktors als Steigung einer linearen Regression. Das Ergebnis ist in Abb. 6 dargestellt und liefert uns die Kapazitätsdimension  $D = 2.000 \pm 0.001$ . Die Unsicherheit ergibt sich als fünffache Standardabweichung der linearen Regression.

Die errechnete Kapazitätsdimension lässt den Rössler Attraktor somit als eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit erscheinen. Die Cantor-Mengen-Struktur des Attraktors lässt jedoch auf eine nicht ganzzahlige Kapazitätsdimension  $2 < D$  schließen [Mandelbrot 1977]. Folglich konnte die fraktale Struktur des Attraktors unter Anwendung von Takens Box Counting Algorithmus



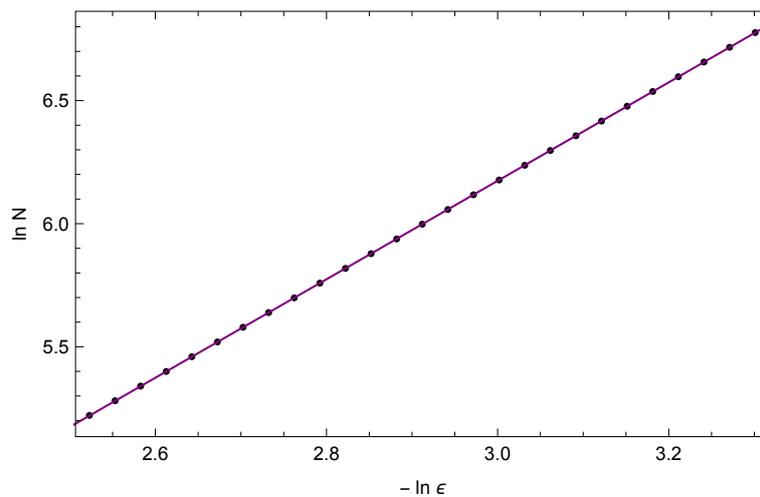


Abbildung 6: Regressionsgerade durch die errechneten Werte  $\ln N(\epsilon)$  gegen  $-\ln \epsilon$  im Bereich  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$  bis  $\epsilon = 30 \cdot 10^{-4}$ .

nicht erfasst werden. Um die fraktale Struktur des Rössler Attraktors erfassen zu können, wären kleinere Boxengrößen  $\epsilon$  nötig, welche jedoch einen untragbaren Rechenaufwand einfordern.

## 4 Fazit

Takens box-counting Algorithmus wurde auf dem Rössler Attraktor angewandt, um eine Näherung der Kapazitätsdimension des Attraktors zu errechnen. Wie zu erwarten, zeigte sich für den Rössler Attraktor als höherdimensionale Menge ein Konvergenzproblem des Algorithmus. Das Konvergenzproblem konnte schließlich durch Extrapolation bewältigt werden. Es konnte somit die Kapazitätsdimension  $D = 2.000 \pm 0.001$  errechnet werden, welche den Attraktor als eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit erscheinen lässt. Die Cantor-Mengen-Struktur des Rössler Attraktors lässt jedoch auf eine Kapazitätsdimension  $2 < D$  schließen. Folglich konnte die fraktale Struktur des Rössler Attraktors unter Anwendung von Takens box-counting Algorithmus nicht erfasst werden. Um die fraktale Struktur des Rössler Attraktors erfassen zu können wären kleinere Boxengrößen nötig, welche jedoch einen untragbaren Rechenaufwand einfordern.

## Literatur

Boeing, G. (2016). Visual analysis of nonlinear dynamical systems: Chaos, fractals, self-similarity and the limits of prediction. *Systems* 4, 37.

Farmer, J. D., E. Ott, and J. A. Yorke (1983). The dimension of chaotic attractors. *Physica D* 7, 153.

Greenside, H., A. Wolf, J. Swift, and T. Pignataro (1982). Impracticality of a box-counting algorithm for calculating the dimensionality of strange attractors. *Phys. Rev. A* 25, 3453.

Leven, R., B. Koch, and B. Pompe (1989). *Chaos in dissipativen Systemen*. F. Vieweg.



- 
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* 20, 130.
- Mandelbrot, B. B. (1977). *Fractals: Form, chance, and dimension*. W. H. Freeman & Co.
- McGuinness, M. J. (1983). The fractal dimension of the lorenz attractor. *Phys. Lett. A* 99, 5.
- Peitgen, H.-O., H. Jürgens, and D. Saupe (2004). *Chaos and fractals : new frontiers of science*. Springer.
- Rössler, O. E. (1976). An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A* 57, 397.
- Russell, D. A., J. D. Hanson, and E. Ott (1980). Dimension of strange attractors. *Phys. Rev. Lett.* 45, 1175.
- Takens, F. (2006). *Detecting Strange Attractors in Turbulence*, pp. 366–381. Springer Verlag.

